

## **Carteiras de Variância Mínima no Mercado de Ações Brasileiro: Uma Abordagem Utilizando Algoritmos Genéticos**

### **Autoria**

Guilherme Isaac Giorgete Oliveira - guicom@usp.br  
Graduação em Contabilidade FEAUSP / USP - Universidade de São Paulo

Leandro Maciel - leandromaciel@usp.br  
Departamento de Administração / USP - Universidade de São Paulo

### **Resumo**

Esse artigo avalia o desempenho de carteiras de variância mínima no mercado de ações brasileiro obtidas por meio de um algoritmo genético (AG), método de computação evolucionária fundamentado na teoria da evolução para obtenção de soluções aproximadas em problemas de otimização. Os AGs são eficientes para a busca de soluções ótimas, ou aproximadamente ótimas, em níveis globais, em uma grande variedade de problemas, ao não impor limitações ao espaço de busca e função objetivo, comumente verificadas em métodos tradicionais baseados em gradiente. Os desempenhos das carteiras de mínima variância são comparados com os de carteiras que maximizam a razão de Sharpe, também otimizadas por AGs e por métodos de gradiente, e com os de benchmarks como o IBOVESPA e de carteiras igualmente ponderadas. Para o período de janeiro de 2010 a dezembro de 2019, sob distintas frequências de rebalanceamento, os resultados indicaram, de forma geral, a superioridade das carteiras de variância mínima quando otimizadas por algoritmos genéticos em termos de métricas de retorno e risco, mostrando-se como alternativas potenciais para investidores na determinação de suas carteiras no mercado de ações brasileiro.

## Carteiras de Variância Mínima no Mercado de Ações Brasileiro: Uma Abordagem Utilizando Algoritmos Genéticos

### Resumo

Esse artigo avalia o desempenho de carteiras de variância mínima no mercado de ações brasileiro obtidas por meio de um algoritmo genético (AG), método de computação evolucionária fundamentado na teoria da evolução para obtenção de soluções aproximadas em problemas de otimização. Os AGs são eficientes para a busca de soluções ótimas, ou aproximadamente ótimas, em níveis globais, em uma grande variedade de problemas, ao não impor limitações ao espaço de busca e função objetivo, comumente verificadas em métodos tradicionais baseados em gradiente. Os desempenhos das carteiras de mínima variância são comparados com os de carteiras que maximizam a razão de Sharpe, também otimizadas por AGs e por métodos de gradiente, e com os de *benchmarks* como o IBOVESPA e de carteiras igualmente ponderadas. Para o período de janeiro de 2010 a dezembro de 2019, sob distintas frequências de rebalanceamento, os resultados indicaram, de forma geral, a superioridade das carteiras de variância mínima quando otimizadas por algoritmos genéticos em termos de métricas de retorno e risco, mostrando-se como alternativas potenciais para investidores na determinação de suas carteiras no mercado de ações brasileiro.

**Palavras-chave:** Algoritmos Genéticos; Carteira de Variância Mínima; Otimização de Carteiras; Mercado de Ações; B3.

### 1. Introdução

Baseada no cálculo das médias e das variâncias/covariâncias dos retornos dos preços de ativos financeiros, a Moderna Teoria do Portfólio de Markowitz (1952) é, até hoje, amplamente utilizada para compor carteiras eficientes nos mercados acionários. A teoria da média-variância de Markowitz propõe que, com base em estimativas da média e da variância/covariância, é possível encontrar um conjunto de pesos, i.e. compor uma carteira, que resulta no maior nível de retorno por unidade de risco. Entretanto, apesar da popularidade, estudos evidenciam um baixo desempenho dessa estratégia, sobretudo na presença de erros de estimação dos parâmetros correspondentes - médias e variâncias/covariâncias (DeMiguel e Nogales, 2009).

São diversas as estratégias de alocação de recursos que fazem uso da teoria de Markowitz, como, por exemplo, a de variância mínima, a que maximiza a razão de Sharpe, ou a que maximiza a média geométrica dos retornos. Independente da abordagem, a determinação dos pesos decorre da solução de um problema de otimização associado. Esse problema consiste em obter um conjunto de pesos que satisfaça a função objetivo da estratégia, sendo, portanto, dependente da complexidade do espaço de busca associado. A obtenção da solução ótima se dá, em geral, com o uso de métodos tradicionais de otimização, sobretudo os baseados em gradiente, o que pode acarretar na determinação de soluções correspondentes a máximos ou mínimos locais, portanto, afetando o desempenho das estratégias (Chiam, Tan e Mamum, 2008). Uma possível alternativa aos métodos tradicionais de otimização são, por exemplo, os modelos de otimização de Inteligência Artificial (IA) bioinspirados, mais conhecidos como modelos de computação evolucionária (*evolutionary computing algorithms*).

Modelos de computação evolucionária, para a solução de problemas de otimização, independem das características do espaço de busca associado, diferente de técnicas de gradiente, que exigem funções contínuas e diferenciáveis, por exemplo. De forma geral, tais métodos utilizam um conjunto de regras definido para encontrar a solução ótima do problema em um universo de possíveis soluções. Os Algoritmos Genéticos (AGs), particularmente, como uma das técnicas mais utilizadas em computação evolucionária, baseiam-se na teoria da

evolução proposta por Charles Darwin em 1859 em seu livro *A origem das espécies*, à medida que as soluções mais aptas a resolver o problema sobrevivam ao longo das gerações, em detrimento daquelas menos efetivas, ou seja, que estão associadas com pior valor da função objetivo em questão (Cartacho e Souza, 2002).

Além dos algoritmos genéticos, outras meta-heurísticas de IA são também utilizadas para a solução de problemas de otimização. Dentre os principais algoritmos, podemos citar: colônia de formigas (*Ant Colony*), que se baseiam na capacidade das formigas em encontrar o menor caminho entre a sua colônia e o alimento (França, 2005); enxame de partículas (*Particle Swarm*), que é baseado em estudos sociais da capacidade de indivíduos em interagir entre si e com o meio ambiente (Serapião, 2009); e de colônias de abelhas (*Bee Optimization*), que podem ser baseados tanto no comportamento das abelhas na coleta de alimentos, no acasalamento e na evolução da abelha rainha (Serapião, 2009). Esses métodos são utilizados para resolução de problemas de diversas áreas, como por exemplo na otimização de sistemas elétricos e na avaliação de danos em estruturas de concreto (Carrillo, 2007).

Dado o elevado potencial observado na solução de uma grande variedade de problemas, os algoritmos bioinspirados começaram também a ser implementados e estudados no universo das finanças, como na otimização de carteiras (Marques, 2007; Silva, Herthel e Subramanian, 2019), em modelos de estimação da estrutura a termo da taxa de juros (Franklin Jr., 2012), na alocação de recursos em mercados de energia elétrica (Suksonghong, 2014), dentre outros. Contudo, para o mercado de capitais do Brasil ainda são escassos os trabalhos que avaliam a potencialidade de métodos de computação evolucionária na determinação de carteiras de investimento, em particular, carteiras de simples replicação, como a de mínima variância.

O mercado acionário brasileiro apresentou um crescimento significativo nos últimos anos. Em 2019, segundo dados da Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiros e de Capitais (Anbima), o volume financeiro captado pelas empresas brasileiras foi de R\$ 90,10 bilhões, um aumento de 593,7% comparado a 2018. Já em 2020, o total captado foi de R\$ 119,30 bilhões, em grande parte decorrente aos IPOs, as ofertas iniciais de ações, que tiveram um aumento de 344% em relação ao ano anterior. O número de investidores cadastrados na B3, em abril de 2020, chegou ao patamar de 2.358.290, número significativamente superior aos 610.915 usuários cadastrados em 2010 segundo informações da B3<sup>1</sup>. Esse movimento decorreu, em partes, da queda observada na taxa básica de juros no Brasil, a taxa Selic, que em julho de 2016 era de 14,25% a.a. e, na reunião do Copom do dia 28 de outubro de 2020, foi definida em 2,00%. Essa queda tornou os investimentos em renda variável mais atrativos em detrimento da renda fixa, contribuindo para o aumento dos investidores cadastrados e do volume de operações em bolsa.

Assim, dada a importância crescente do mercado de ações do Brasil, o desenvolvimento de técnicas mais eficazes de composição de carteiras pode perpetuar o aumento dos investidores no mercado de capitais do país, motivados pela alta liquidez e pela presença de robustas e simples estratégias empíricas de alocação, potencializando a adequada tomada de decisão. Nesse sentido, a economia como um todo é beneficiada, dada a importância do mercado de capitais para o desenvolvimento dos países, ao fomentarem a alocação da poupança e, assim, promover investimentos produtivos (Dantas, 2020).

Esse artigo objetiva avaliar o desempenho da utilização de algoritmos genéticos para otimização de carteiras de variância mínima no mercado acionário brasileiro. Busca-se verificar se carteiras de mínima variância otimizadas com AGs resultam em um melhor desempenho fora da amostra do que quando otimizadas por técnicas tradicionais, baseadas em gradiente. As carteiras de mínima variância são selecionadas por compreenderem uma estratégia simples, dentre as carteiras que formam a fronteira eficiente de Markowitz, ao requererem apenas a estimação da matriz de covariâncias e, assim, reduzirem os impactos negativos de problemas de estimação das médias dos retornos; assim como são de fácil replicação por investidores.

Além disso, a literatura empírica de finanças no Brasil indica um bom desempenho de carteiras de variância mínima no mercado acionário, como em Rubesam e Beltrame (2013), o que motiva a avaliação dessa estratégia com base em técnicas mais robustas de otimização, como os AGs. Os resultados dessas carteiras são comparados, com base em métricas de retorno e risco, contra tradicionais *benchmarks*, como o IBOVESPA, e com base em diferentes metodologias de formação de carteiras, como a carteira que maximiza a razão de Sharpe e carteiras igualmente ponderadas.

A pesquisa visa contribuir com a literatura por meio da avaliação empírica de uma alternativa para a otimização/gestão de carteiras ainda pouco explorada no mercado brasileiro de ações: carteiras de variância mínima otimizadas com base em AGs. Adicionalmente, além da motivação teórica em propor a avaliação dos AGs no mercado de capitais brasileiro, do ponto de vista da busca de uma solução ótima ou aproximadamente ótima, uma contribuição prática também é verificada, pois a estratégia proposta pode ser replicada por investidores, devido a sua baixa complexidade e necessidade de poder computacional acessível, podendo resultar em melhor desempenho na análise de investimentos por agentes de menor porte.

Para atingir o objetivo proposto, esse artigo foi estruturado, além dessa introdução, da seguinte forma: a seção 2 apresenta uma revisão de literatura sobre seleção de carteiras e AGs; a seção 3 descreve a metodologia adotada; a seção 4 detalha e discute os resultados; e, por fim, a quinta seção conclui o trabalho e apresenta indicações de pesquisas futuras.

## 2. Revisão da Literatura

São diversos os estudos na literatura empírica de finanças que se baseiam na teoria da média-variância de Markowitz para compor carteiras eficientes nos mercados de ações, inclusive para o Brasil. Júdice, Ribeiro e Santos (2003), por exemplo, discutem a aplicação do modelo de Markowitz e de Konno no problema de seleção de carteiras. O modelo de Konno utiliza como medida de risco o desvio absoluto, simplificando o problema quadrático de Markowitz. Zanini e Figueiredo (2005) comparam o desempenho da Teoria de Markowitz com a estratégia desenvolvida por Sharpe, no qual se supõe que os retornos dos ativos se correlacionam com um índice do mercado. Almonacid e Santovito (2010) estudam a aplicação da Teoria de Markowitz em ativos relacionados ao setor imobiliário, os autores buscaram mensurar o desempenho da abordagem de Markowitz quando aplicada a ativos de características específicas.

Como alternativa ao modelo de média-variância de Markowitz para composição de portfólios eficientes, podemos também citar o estudo de Candeira, Moura e Santos (2013), que avaliou a eficácia do modelo de precificação de ativos fatorial Fama-French-Carhart para compor carteiras ótimas de mínima variância utilizando os preços de fechamento de 61 ações e os valores contábeis e de mercado de empresas que faziam parte do IBOVESPA entre janeiro de 2000 a dezembro de 2010. Os resultados observados indicaram que o modelo proposto gera carteiras com um melhor desempenho ajustado pelo risco quando comparado com *benchmarks* compostos por outros modelos fatoriais.

Uma das principais estratégias de composição de carteiras baseada na abordagem de Markowitz é a da Carteira de Variância Mínima (CVM). Essa estratégia, em resumo, tem o objetivo de formular uma carteira com o menor risco (mensurado, por exemplo, pelo desvio-padrão) dado um universo de carteiras eficientes possíveis. Existem diversos estudos na literatura que mostram que carteiras de variância mínima podem gerar retornos superiores aos principais *benchmarks* de mercado, como o IBOVESPA no caso do Brasil, gerando discussões acerca do *trade-off* positivo entre risco e retorno. Rubesam e Beltrame (2013) compararam, com base em dados para o período de junho de 1998 a junho de 2011, o desempenho da CVM com o desempenho de carteiras igualmente ponderadas, que maximizam a razão de Sharpe, e

que maximizam a média geométrica dos retornos. Todas as ações negociadas no mercado brasileiro foram analisadas na amostra em carteiras que consideravam tanto posições compradas e vendidas, e com e sem alavancagem. Os autores indicaram que as carteiras de variância mínima apresentaram, em geral, um retorno anualizado superior e uma menor volatilidade que as carteiras alternativas.

Não só estratégias baseadas em risco e retorno são opções de ferramentas para formulação de carteiras. Um modelo que utiliza critérios adicionais, além do risco e retorno, para composição de uma carteira de investimentos, foi estudado por Lyrio (2015). O autor propôs estratégias fundamentadas em instrumentos de apoio à decisão, integrando conceitos da análise fundamentalista e técnica. Os dados utilizados foram de empresas com ações negociadas no mercado brasileiro entre janeiro de 2012 e julho de 2013. As carteiras recomendadas pelo modelo multicritério apresentaram um retorno acumulado superior ao do IBOVESPA no mesmo período.

Mesmo com uma extensa literatura apontando a eficiência do modelo de Markowitz e suas extensões para otimização de carteiras, limitações ainda são observadas. DeMiguel e Nogales (2009), por exemplo, citam a instabilidade e desempenho baixo de carteiras em decorrência de erros de estimação dos retornos. Santos e Tessari (2012) destacam a dificuldade de estimar com acurácia os retornos esperados e a matriz de covariância dos ativos. Esses problemas se tornam mais relevantes quanto maior a complexidade do problema de otimização associado, em decorrência das restrições exigidas por métodos tradicionais de obtenção de soluções baseados em gradiente (Chian et al., 2008). Nesse cenário, novas técnicas de otimização começaram a ser aplicadas na literatura para compor carteiras de ativos no arcabouço de Markowitz, sobretudo as de computação evolucionária.

Quinzani (2010) propõe o uso de algoritmos de computação evolucionária para resolver um problema de otimização de carteiras multiobjetivo, em que se deseja maximizar o retorno e minimizar o risco conjuntamente. Costa, Cortes e Costa (2019) desenvolvem o uso de algoritmos baseados em meta-heurísticas para otimização de portfólios de investimentos, e Igarashi, Martioli e Igarashi (2019) utilizam um algoritmo genético para seleção de carteiras geradas a com base em previsões dos preços dos ativos, obtidas a partir de um modelo de redes neurais.

Fu, Chung e Chung (2013) buscaram encontrar a melhor combinação de indicadores técnicos de média móvel, oscilador estocástico, *momentum*, índice de fluxo de dinheiro e índice de força relativa para tomada de decisão de composição de carteiras com a otimização realizada por AGs. Os autores utilizam dados de 2000 a 2009 de 8 ações negociados na bolsa de valores de Hong Kong e constatam que, mesmo a estratégia tendo um retorno menor quando comparada a estratégia de *buy-and-hold*, o risco é menor, sendo capaz de gerar lucro em momentos de alta e baixa. Ainda, a otimização por AGs obteve um maior índice Sharpe, superando a carteira igualmente ponderada e a carteira otimizada por uma função quadrática, também baseada em Markowitz (Fu et al., 2013).

Outras pesquisas também sugerem um bom desempenho de carteiras otimizadas por meio de algoritmos genéticos quando nas funções objetivo são incorporadas restrições. Lin e Liu (2008) aplicaram técnicas de otimização baseadas em AGs para composição de um portfólio com dados de 1997 a 2000 de fundos mútuos de Taiwan considerando restrições de lotes mínimos. Os resultados indicaram que a carteira se aproxima da fronteira eficiente, e que a estratégia pode obter soluções quase ótimas. Chang, Yang e Chang (2009), com base em restrições de cardinalidade, desenvolveram técnicas de otimização baseadas em AGs aplicadas para diferentes preferências pelo risco do investidor na composição de carteiras. Os dados utilizados na pesquisa foram coletados da bolsa de Hong Kong, Londres e Estados Unidos, no período de janeiro de 2004 a dezembro de 2006. Os resultados mostraram a eficiência da técnica de otimização bioinspirada, em especial quando a quantidade de ativos no portfólio é menor.

Como alternativa aos algoritmos genéticos na otimização de carteiras, Chen (2015) aplicou uma técnica de otimização baseada em colônias de abelhas (*Bee Optimization*), com dados históricos de 30 ações negociadas na bolsa de Xangai de 2004 a 2005, com restrições de cardinalidade, quantidade de ativos e considerando custos de transação. A técnica aplicada demonstrou ser eficaz na busca de soluções ótimas para o problema de composição de portfólios. Dias (2008) e Chen, Hou e Chang-Chien (2009) são também estudos que evidenciam o potencial dos AGs em estratégias de investimentos.

No mercado brasileiro, Cartacho e Souza (2002) aplicaram, em conjunto, métodos de algoritmos genéticos e de redes neurais artificiais no problema de seleção de portfólios com a análise de oito ações negociadas na B3 no período de janeiro de 1999 a dezembro de 2000. O modelo híbrido desenvolvido pelos autores utilizou o desempenho positivo das redes neurais em encontrar padrões em séries temporais, e na utilidade do algoritmo genético em solucionar problemas de otimização complexos. O modelo híbrido obteve carteiras que apresentaram um retorno superior, com baixa diferença no risco, quando comparadas ao método de Markowitz em sua versão *ex-ante*, isto é, quando as estimativas de média e variância das carteiras utilizam dados históricos e não previsões. Contudo, o trabalho apenas considerou uma carteira composta por 8 ativos em específico.

Em resumo, são diversos os trabalhos que apontam o bom desempenho de AGs, e técnicas de computação evolucionária, de forma geral, quando aplicados em finanças, em especial para a otimização de carteiras. No entanto, há ainda uma carência de trabalhos que avaliam sua aplicação no mercado de capitais brasileiro, mais especificamente combinando AGs com uma estratégia de mínima variância, como proposto no presente trabalho.

### 3. Metodologia

Nesta seção são apresentados os dados utilizados na pesquisa, bem como as metodologias consideradas para a formação das carteiras. Em seguida, são descritos os algoritmos genéticos para a solução de problemas de otimização. Por fim, são detalhadas as medidas de risco e retorno consideradas para a comparação e avaliação dos resultados das carteiras otimizadas por algoritmos genéticos e por técnicas baseadas em gradiente.

#### 3.1 Dados

Os dados correspondem aos preços diários de fechamento de 143 ações negociadas na B3. Foram consideradas as ações que tiveram liquidez diária em todo o período de janeiro de 2010 a dezembro de 2019, ou seja, que registraram um volume de negócios superior a zero durante todos os dias do período de análise. Os dados foram coletados no *software* Economatica. Além da cotação diária, foram coletados dados, para o mesmo período, do valor de fechamento diário do IBOVESPA, principal indicador de desempenho médio das ações negociadas na B3, assim como os valores diários da taxa média dos contratos Certificado de Depósito Interbancário (CDI). A taxa dos contratos CDI será utilizada como *proxy* para taxa livre de risco.

Neste trabalho, consideramos o retorno logarítmico para cálculo dos retornos diários. Sendo  $r_t$  o retorno no instante  $t$ , ele é calculado como:

$$r_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}), \quad (1)$$

em que  $P_t$  é o preço de fechamento em  $t$ .

#### 3.2 Métodos de seleção de carteiras

O modelo proposto por Markowitz, também conhecido como estratégia média-variância, resume-se na obtenção de carteiras que forneçam o maior retorno por unidade de risco, ou seja, carteiras eficientes. Com base na média e variâncias/covariâncias dos retornos

dos preços de ativos financeiros, os pesos da carteira são obtidos como a solução de um processo de otimização associado. Dentre as carteiras da fronteira eficiente, destaca-se a carteira de variância mínima (CVM), obtida por meio da solução do seguinte problema de otimização:

$$\min_{\mathbf{w}} [\mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w}], \quad (2)$$

em que  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_N)'$  é o vetor de pesos,  $N$  o número de ativos da carteira e  $\Sigma$  a matriz de covariâncias de ordem  $N \times N$ .

A CVM limita-se a encontrar o conjunto de pesos que minimize o risco do portfólio, sem levar em consideração a estimação do retorno esperado, caracterizando, portanto, uma estratégia mais simplificada e livre de erros de estimação dos retornos. Tais carteiras serão consideradas nesse trabalho de forma que o problema de otimização em (2) será solucionado por meio de Algoritmos Genéticos e também por técnicas tradicionais baseadas em gradiente. Adicionalmente, são inseridas no problema em (2) as restrições  $\sum_{i=1}^N w_i = 1$  (carteira totalmente investida), e  $w_i > 0, \forall i$  com  $i = 1, \dots, N$ , (apenas posições compradas), de forma a tornar a estratégia de mais simples replicação por investidores de menor porte.

Uma das formas mais conhecidas para avaliação de desempenho de carteiras é a razão de Sharpe. Utilizando a razão de Sharpe, podemos formular uma carteira que maximiza a relação risco-retorno associada, sendo o risco mensurado como a variância dos retornos. O índice de Sharpe é definido como:  $IS = (\mu_p - r_f) / \sigma_p$ , sendo  $\mu_p$  o retorno esperado do portfólio,  $r_f$  o retorno do ativo livre de risco, e  $\sigma_p$  o desvio-padrão (risco) da carteira. Dessa forma, a CVM é comparada com a carteira que maximiza a razão de Sharpe (MSR), obtida como a solução do seguinte problema de otimização:

$$\max_{\mathbf{w}} \left[ \frac{\mathbf{w}' \boldsymbol{\mu} - r_f}{\sqrt{\mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w}}} \right], \quad (3)$$

sujeito a  $\sum_{i=1}^N w_i = 1$  e  $w_i \geq 0, \forall i, i = 1, \dots, N$ , onde  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_N)'$  é o vetor de retornos esperados.

Note que, assim como a CVM, as carteiras que maximizam a razão de Sharpe também serão otimizadas de acordo com AGs e métodos de otimização baseados em gradiente. Por fim, considerou-se também a comparação com carteiras igualmente ponderadas (CIP), como uma estratégia “ingênua”, pois define *a priori* os pesos e, portanto, não faz uso de métodos de otimização. Essa estratégia consiste em atribuir pesos iguais para todos os ativos, ou seja:

$$w_i = \frac{1}{N}, \forall i, i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Segundo a abordagem de Markowitz (1952), o retorno esperado e a matriz de covariâncias são as estimativas necessárias para a determinação de um portfólio eficiente. O retorno esperado das carteiras,  $\boldsymbol{\mu}_p$ , é aqui calculado por meio da média dos retornos, ou seja:

$$\boldsymbol{\mu}_p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mu_i, \quad (5)$$

onde  $\mu_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{i,t}$  é o retorno médio do ativo  $i$ ,  $r_{i,t}$  é o retorno do ativo  $i$  no instante  $t$ , e  $T$  é o número de observações na amostra. Note que a determinação da CVM em (2) não requer a estimação do retorno esperado da carteira.

Alternativamente, existem diferentes métodos de estimação da matriz de covariâncias. Neste trabalho, utiliza-se a matriz de covariância amostral, que é amplamente considerada por praticantes de mercado devido à sua simplicidade. A matriz de covariância amostral,  $\Sigma = [\hat{\sigma}]_{i,j}$ , cujos elementos representam a covariância amostral entre os ativos  $i$  e  $j$ ,  $\hat{\sigma}_{i,j}$ , é calculada como:

$$\hat{\sigma}_{i,j} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{i,t} - \mu_i) (r_{j,t} - \mu_j), \quad (6)$$

onde  $\mu_i$  é o retorno médio do ativo  $i$ .

A resolução do problema de otimização, i.e. obtenção dos pesos, da carteira de variância mínima e da carteira que maximiza a razão de Sharpe se dará por técnicas tradicionais de

otimização, baseadas em gradiente, e por meio de algoritmos genéticos (AGs). Todos os experimentos computacionais foram realizados no *software* R, versão 3.6.0.

### 3.3. Medidas de avaliação de desempenho

Um procedimento de *backtesting* é implementado para avaliação do desempenho fora da amostra das carteiras. Inicialmente, os três anos iniciais dos dados são destinados para a estimação das matrizes de covariância e implementação das diferentes estratégias: CVM, MSR e CIP. Em seguida, as carteiras serão avaliadas para o período restante, em uma abordagem de manutenção dos portfólios (sem rebalanceamento), assim como para cenários com diferentes frequências de rebalanceamento: mensal, trimestral, anual; aumentando assim a robustez dos resultados da pesquisa. Para a avaliação e comparação dos resultados das carteiras geradas são adotadas medidas de desempenho que consideram o retorno e o risco das posições. Como medidas de performance serão calculados os retornos anualizados, volatilidade anualizada, índice de Modigliani, razão de Sharpe, *maximum drawdown*, e parâmetros *alpha* e *beta* do modelo CAPM. Essas medidas são descritas a seguir.

O retorno anualizado de uma carteira,  $r_A$ , é calculado da seguinte forma:

$$r_A = \left[ \prod_{t=1}^T (1 + r_{p,t}) \right]^{252/T} - 1, \quad (7)$$

onde  $r_{p,t}$  é o retorno da carteira no instante  $t$ .

A volatilidade anualizada,  $\sigma_A$ , é calculada como:

$$\sigma_A = \sqrt{252} \cdot \sigma_p = \sqrt{252} \cdot \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{p,t} - \mu_p)^2}, \quad (8)$$

sendo  $\mu_p$  o retorno médio da carteira e  $\sigma_p$  o desvio-padrão do portfólio.

O índice de Modigliani (*IM*) permite ajustar o risco de uma carteira ao risco do índice de mercado utilizado para comparar o desempenho:

$$IM = \frac{\sigma_M}{\sigma_p} (\mu_p - r_f) + r_f, \quad (9)$$

onde  $\sigma_M$  é o desvio-padrão (risco) da carteira de mercado, nesse trabalho o IBOVESPA.

O *maximum drawdown*, ou perda máxima, é um indicador de risco que evidencia a maior perda ocorrida desde um ponto de alta (pico) até um ponto de mínima em uma série histórica. Por fim o *alpha* ( $\alpha_p$ ) e *beta* ( $\beta_p$ ) dos portfólios são calculados a partir da equação de regressão do CAPM, ou seja:

$$r_{p,t} - r_{f,t} = \alpha_p + \beta_p (r_{p,t} - r_{f,t}) + \epsilon_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (10)$$

sendo  $\epsilon_t$  um termo de erro aleatório.

As carteiras CVM e MSR serão obtidas utilizando técnicas tradicionais de otimização, por meio do pacote *ROI* do *software* R, assim como utilizando uma abordagem de Algoritmos Genéticos, implementada no pacote *GA* e apresentada a seguir.

### 3.4 Algoritmos Genéticos

Os algoritmos genéticos são modelos de otimização global baseados nos princípios da teoria da evolução e da genética. Com base em uma estratégia de busca paralela e estruturada, mas aleatória, os AGs solucionam problemas de otimização por meio de gerações de soluções “mais aptas”, ou seja, pontos nos quais a função a ser minimizada (ou maximizada) tem valores relativamente baixos (ou altos), que por meio de gerações (iterações) propagam suas características para as gerações futuras (Holland, 1975; Goldberg, 1989). Um AG padrão é composto, essencialmente, por 4 etapas, descritas a seguir no contexto desse trabalho, para obtenção dos pesos ótimos em problemas de seleção de portfólios.

**Etapa 1.** Gera-se uma população inicial com indivíduos aleatórios de tamanho  $NP$ . Nesse trabalho, cada indivíduo  $j$  corresponde a um vetor de pesos  $\mathbf{w}_j = (w_{j,1}, \dots, w_{j,N})'$  de dimensão  $N$ , com  $j = 1, \dots, NP$ , tal que  $\sum_{i=1}^N w_i = 1$  e  $w_i \geq 0, \forall i, i = 1, \dots, N$ . A população

inicial é gerada aleatoriamente satisfazendo as restrições associadas. Note que a representação dos indivíduos é por meio de números reais, sendo possível, alternativamente, utilizar a representação binária, também comum em algoritmos de computação evolucionária.

**Etapa 2.** A aptidão de cada indivíduo da população é calculada de acordo com uma função *fitness*, ou seja, o valor da função objetivo associada, conforme Eqs. (2) e (3) para a CVM e MSR, respectivamente.

**Etapa 3.** Os indivíduos mais aptos são selecionados para se gerar uma nova população, ainda de tamanho  $NP$ , por meio da utilização de operadores genéticos de *crossover* e mutação. De forma geral, os AGs se diferenciam quanto aos operadores genéticos utilizados. Inicialmente, dois indivíduos pais são selecionados aleatoriamente para gerar os cromossomos filhos da nova geração. O *crossover* ocorre de acordo com uma taxa de *crossover*,  $cross_{rate}$ . Gera-se um número aleatório a partir de uma distribuição uniforme no intervalo  $[0,1]$  e, se esse número excede a taxa de *crossover*,  $cross_{prob}$ , o operador é aplicado para gerar os cromossomos filhos, caso contrário, os cromossomos pais passam para a nova geração. Nesse trabalho, utilizou-se o operador de *crossover* de Laplace. Sejam  $\mathbf{w}_1^g$  e  $\mathbf{w}_2^g$  dois indivíduos pais na geração  $g$  (vetores de pesos), os indivíduos filhos gerados para a próxima geração,  $g + 1$ , são obtidos de acordo com:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1^{g+1} &= \mathbf{w}_1^g + \rho |\mathbf{w}_1^g - \mathbf{w}_2^g|, \\ \mathbf{w}_2^{g+1} &= \mathbf{w}_2^g + \rho |\mathbf{w}_1^g - \mathbf{w}_2^g|, \end{aligned} \quad (11)$$

onde  $\rho = a - b \ln(\theta)$  se  $\theta \leq 0,5$ , ou  $\rho = a + b \ln(\theta)$  se  $\theta > 0,5$ , que é um número aleatório que segue uma distribuição de Laplace com parâmetros  $a$  de localização e  $b$  de escala; e  $\theta$  é um número aleatório gerado a partir de uma distribuição uniforme no intervalo  $[0,1]$ . Considerou-se  $a = 0$  e  $b = 0,15$  como *default* no pacote *GA*.

Em seguida, o operador de mutação é aplicado ou não aos indivíduos filhos, que atribui uma certa probabilidade de um indivíduo sofrer uma alteração, atribuindo maior variabilidade para as soluções, evitando de o algoritmo convergir para um mínimo local. Seja um indivíduo da nova geração, ou seja, um vetor de dimensão  $N$ . Para cada componente desse vetor é gerado um número aleatório a partir de uma distribuição uniforme no intervalo  $[0,1]$ . Se esse número é menor que uma determinada probabilidade de mutação,  $mut_{prob}$ , a componente do vetor é substituída por um número aleatório de uma distribuição uniforme no intervalo  $[0,1]$ . Caso contrário, a componente do indivíduo (vetor) não sofre mutação. Esse operador de mutação é a mutação uniforme. A probabilidade de mutação deve ser sempre baixa ou então o algoritmo pode perder a característica de ser uma meta-heurística, ou seja, de encontrar a solução do problema a partir de processos lógicos e não como um método simplesmente aleatório (Holland, 1975).

**Etapa 4.** Avalia-se a aptidão dos indivíduos da nova geração.

As etapas de 2 a 4 – processo de evolução – são repetidas (iteradas) até que o número máximo de gerações,  $max_{ger}$ , seja atingido. Outro critério de parada também foi considerado: o processo evolutivo é interrompido quando não há melhora na aptidão da nova geração ao longo das últimas  $N_{\Delta fit}$  gerações. As diversas interações (gerações) possibilitam que a população evolua e que os indivíduos se tornem cada vez mais aptos, ou seja, obtenham-se os pesos que melhor satisfazem as condições das Eqs. (2) e (3) para a CVM e MSR, respectivamente.

Por fim, cabe destacar que um processo de elitismo foi considerado nos AGs deste trabalho. Ou seja, os  $N_{elite}$  indivíduos com melhor aptidão de cada geração são sempre selecionados para compor as gerações futuras. O elitismo é essencial para o caso generacional a fim de evitar que a população piore.

Por se tratarem de métodos especialistas, os algoritmos genéticos precisam de uma parametrização diferente para cada tipo de problema proposto. Dessa forma, os parâmetros de controle dos AGs implementados nesse trabalho,  $NP$ ,  $cross_{prob}$ ,  $mut_{prob}$ ,  $max_{ger}$ ,  $N_{elite}$  e  $N_{\Delta fit}$  foram selecionados por meio de simulações para encontrar o melhor modelo para cada carteira de ações proposta.

## 4. Resultados e Discussão

### 4.1 Parametrização dos AGs

Os algoritmos genéticos (AGs) são técnicas especialistas, portanto o desempenho está associado ao conjunto de operadores genéticos e parametrização utilizados. Os parâmetros de controle,  $NP$ ,  $cross_{prob}$ ,  $mut_{prob}$ ,  $max_{ger}$ ,  $N_{elite}$  e  $N_{\Delta fit}$ , foram selecionados por meio de simulações. Para os casos das carteiras que sofreram rebalanceamento, a população inicial da nova geração considerou como referência de inicialização o último vetor de pesos otimizado, no sentido de considerar a informação disponível e reduzir o custo computacional. A Tabela 1 apresenta o conjunto de parâmetros de controle utilizados pelos AGs na otimização das carteiras de variância mínima (CVM) e que maximizam a razão de Sharpe (MSR), para os casos em que não há rebalanceamento, e quando o rebalanceamento é mensal, trimestral e anual.

**Tabela 1.** Parâmetros de controle dos AGs para otimização das carteiras de variância mínima (CVM) e que maximiza a razão de Sharpe (MSR) quando não há rebalanceamento (-), e quando o rebalanceamento é mensal, trimestral e anual.

| Parâmetros       | Frequências de Rebalanceamento |        |            |       |        |         |            |        |
|------------------|--------------------------------|--------|------------|-------|--------|---------|------------|--------|
|                  | CVM                            |        |            |       | MSR    |         |            |        |
|                  | -                              | Mensal | Trimestral | Anual | -      | Mensal  | Trimestral | Anual  |
| $NP$             | 550                            | 550    | 450        | 450   | 550    | 500     | 500        | 500    |
| $cross_{prob}$   |                                |        | 0.7        |       |        |         | 0.7        |        |
| $N_{elite}$      |                                |        | 40         |       |        |         | 40         |        |
| $mut_{prob}$     | 0.1                            | 0.1    | 0.01       | 0.1   |        |         | 0.05       |        |
| $max_{ger}$      | 3.000                          | 36.600 | 31.900     | 8.800 | 30.000 | 198.000 | 37.400     | 23.400 |
| $N_{\Delta fit}$ |                                |        | 100        |       |        |         | 100        |        |

### 4.2 Carteiras sem rebalanceamento

A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos para as carteiras sem rebalanceamento. Dados no período de janeiro de 2010 a dezembro de 2012 foram utilizados para estimar as matrizes de covariância, em seguida, as carteiras e variância mínima (CVM) e que maximiza a razão de Sharpe (MSR) foram otimizadas utilizando o algoritmo genético proposto nesse trabalho e também técnicas tradicionais de otimização baseadas em gradiente. Os pesos obtidos foram então mantidos para avaliação fora da amostra, isto é, de janeiro de 2013 até dezembro de 2019. Quando comparadas em termos de retorno anualizado (retorno cumulativo), a carteira CVM otimizada com algoritmos genéticos ( $CVM_{GA}$ ) e a carteira CVM otimizada por meio de técnica de gradiente descendente ( $CVM_{GR}$ ) apresentam retornos de 12,56% a.a. (125,33%) e 11,77% a.a. (114,62%), respectivamente. Ambas as carteiras superaram o retorno cumulativo do IBOVESA, que foi de 59,82%, do CDI, de 90,27% e da carteira igualmente ponderada (CIP) de 39,67%. Este resultado corrobora com os estudos sobre a eficiência dos algoritmos genéticos em problemas de otimização, com destaque para composição de carteiras. Analisando o retorno das carteiras que maximizam a razão de Sharpe (MSR), notamos que nem a otimização por algoritmo genético ( $MSR_{GA}$ ), nem a otimização via gradiente ( $MSR_{GR}$ ) apresentaram melhores resultados que as estratégias de variância mínima, pois apresentaram

retorno anual (retorno cumulativo) de 8,65% (76,69%) e 8,82% (78,68%), respectivamente, abaixo dos valores das carteiras contrapartes de mínima variância. Esse resultado vai em encontro aos observados por Rubesam e Beltrame (2013), também para o mercado do Brasil.

**Tabela 2 - Métricas de avaliação de risco e retorno das carteiras sem rebalanceamento.**

|                         | $CVM_{GR}$ | $MSR_{GR}$ | $CVM_{GA}$ | $MSR_{GA}$ | CIP    | IBOV   | CDI    |
|-------------------------|------------|------------|------------|------------|--------|--------|--------|
| Retorno Anualizado      | 11,77%     | 8,82%      | 12,56%     | 8,65%      | 4,99%  | 7,07%  | 9,82%  |
| Retorno Cumulativo      | 114,62%    | 78,68%     | 125,33%    | 76,69%     | 39,67% | 59,82% | 90,27% |
| Volatilidade Anualizada | 14,18%     | 15,81%     | 14,09%     | 15,94%     | 16,88% | 22,35% | 0,18%  |
| Perda Máxima            | 31,70%     | 42,08%     | 30,07%     | 42,36%     | 50,00% | 45,32% | -      |
| Índice de Sharpe        | 0,12       | -0,06      | 0,18       | -0,07      | -0,26  | -0,11  | -      |
| CAPM Alfa               | 0,00       | 0,00       | 0,00       | 0,00       | 0,00   | -      | -      |
| CAPM Beta               | 0,49       | 0,50       | 0,49       | 0,51       | 0,70   | -      | -      |
| Índice de Modigliani    | 0,13       | 0,08       | 0,14       | 0,08       | 0,03   | -      | -      |
| Correlação IBOVESPA     | 0,78       | 0,71       | 0,78       | 0,71       | 0,93   | -      | -      |

Em termos de risco, as volatilidades anualizadas das carteiras, quando comparadas com o *benchmark* de mercado, o IBOVESPA, foram, em média, 35% menores (ver Tabela 2). A perda máxima, que é a maior perda do capital observado antes de uma nova recuperação, foi de aproximadamente 30% para as carteiras de variância mínima (otimizadas via GA e gradiente), 42% para as carteiras que maximizam a razão de Sharpe (otimizadas via GA e gradiente) e de 45% para o IBOVESPA. Quando se comparam as estratégias de otimização, nota-se que um menor risco é observado para as carteiras CVM e MSR quando obtidas por meio do algoritmo genético (Tabela 2). Porém, apesar da baixa diferença, em comparação com a otimização tradicional de gradiente, pequenas reduções no nível de risco podem resultar em impactos significativos de acordo com características da posição financeira, como volume, alavancagem, etc.

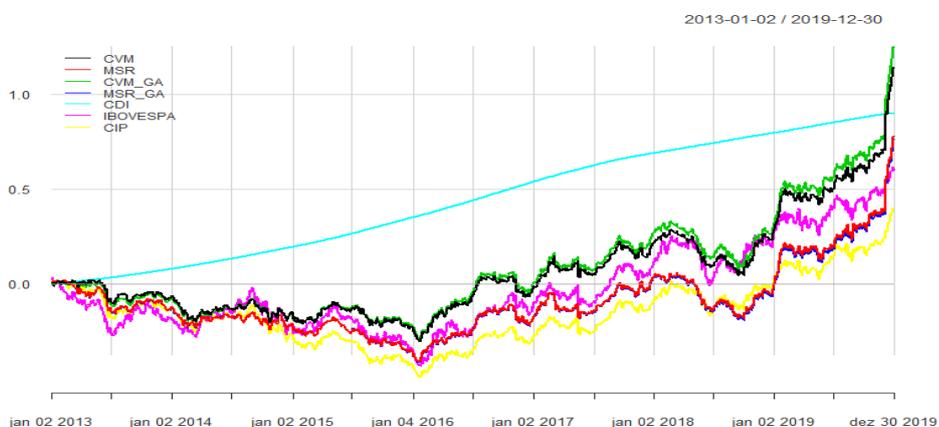
Considerando conjuntamente risco e retorno, apenas as carteiras CVM, otimizadas por gradiente e por AGs ( $CVM_{GR}$  e  $CVM_{GA}$ ), apresentaram um índice de Sharpe positivo, pois foram essas as únicas que superaram o retorno do ativo livre de risco (CDI) no período, de acordo com a Tabela 2. Adicionalmente, o índice de Modigliani para as carteiras foi de 12,89% ( $CVM_{GR}$ ), 14,17% ( $CVM_{GA}$ ), 8,41% ( $MSR_{GR}$ ) e 8,17% ( $MSR_{GA}$ ). A carteira igualmente ponderada apresentou os piores resultados em termos de risco e retorno. Por fim, os resultados da Tabela 2 também indicam que os Alfas do CAPM são estatisticamente insignificantes, e que não há diferenças significativas dos Betas do CAPM, com exceção da CIP, que apresentou um Beta de 0,70. Ainda, a correlação com o IBOVESPA ficou acima de 70% para todas as carteiras.

A Figura 1 apresenta os retornos cumulativos das carteiras ao longo do período fora da amostra, ou seja, de janeiro de 2013 a dezembro de 2019. Podemos perceber que, consistentemente, a carteira de variância mínima, otimizada por AGs, apresenta um retorno cumulativo superior às demais carteiras. Em apenas poucos períodos o IBOVESPA resulta em maior retorno cumulativo. Para a MSR, poucas diferenças são observadas no seu desempenho quando otimizada por AGs ou via técnicas de gradiente.

### 4.3 Carteiras com rebalanceamento anual

Como pode ser observado na Tabela 3, os resultados se mantêm consistentes, mesmo quando as carteiras são rebalanceadas anualmente. O retorno anualizado da carteira CVM otimizada com algoritmos genéticos ( $CVM_{GA}$ ) foi de 11,13%, superior às demais, sendo o retorno anualizado da CVM otimizada com gradiente ( $CVM_{GR}$ ) e das carteiras que maximizam a razão de Sharpe otimizadas por gradiente e AGs ( $MSR_{GR}$  e  $MSR_{GA}$ ) respectivamente de 10,01%, 5,14% e 7,07%. Os retornos cumulativos das carteiras de variância mínima (CVM)

foram superiores quando comparados as carteiras que maximizam a razão de Sharpe (MSR) independentemente do método de otimização. O mesmo resultado é observado quando utilizamos a volatilidade como parâmetro de avaliação, porém, dessa vez, a que apresentou menor volatilidade foi a CVM otimizada por meio da técnica de gradiente descendente ( $CVM_{GR}$ ), com valor de 12,93%, seguido da carteira de variância mínima otimizada por AGs ( $CVM_{GA}$ ) que teve uma volatilidade anualizada de 13,58%. As carteiras que maximizam a razão de Sharpe otimizadas por gradiente e AGs ( $MSR_{GR}$  e  $MSR_{GA}$ ) obtiveram uma volatilidade anualizada respectivamente de 14,56% e 15,68% (ver Tabela 3). Adicionalmente, as carteiras otimizadas com AGs apresentaram os maiores valores do índice de Modigliani, revelando que a técnica de inteligência artificial produz melhores estratégias de investimento em termos de risco e retorno. Por fim, a Figura 2 confirma o melhor desempenho da CVM estimada por meio de AGs em termos de retorno cumulativo quando comparada com as demais carteiras alternativas.



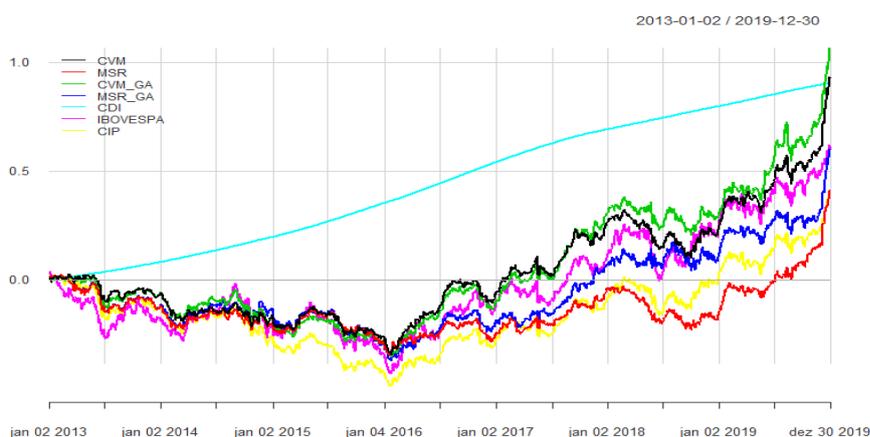
**Figura 1.** Retorno cumulativo das carteiras sem rebalanceamento ao longo do período de janeiro de 2013 a dezembro de 2019.

**Tabela 3 - Métricas de avaliação de risco e retorno das carteiras com rebalanceamento anual.**

|                         | $CVM_{GR}$ | $MSR_{GR}$ | $CVM_{GA}$ | $MSR_{GA}$ | CIP    | IBOV   | CDI    |
|-------------------------|------------|------------|------------|------------|--------|--------|--------|
| Retorno Anualizado      | 10,01%     | 5,14%      | 11,13%     | 7,07%      | 4,99%  | 7,07%  | 9,82%  |
| Retorno Cumulativo      | 92,50%     | 41,05%     | 106,38%    | 59,80%     | 39,67% | 59,82% | 90,27% |
| Volatilidade Anualizada | 12,93%     | 14,56%     | 13,58%     | 15,68%     | 16,88% | 22,35% | 0,18%  |
| Perda Máxima            | 36,00%     | 36,36%     | 37,19%     | 38,54%     | 50,00% | 45,32% | -      |
| Índice de Sharpe        | 0,01       | -0,29      | 0,09       | -0,16      | -0,26  | -0,11  | -      |
| CAPM Alfa               | 0,00       | 0,00       | 0,00       | 0,00       | 0,00   | -      | -      |
| CAPM Beta               | 0,44       | 0,49       | 0,46       | 0,51       | 0,70   | -      | -      |
| Índice de Modigliani    | 0,10       | 0,03       | 0,12       | 0,06       | 0,03   | -      | -      |
| Correlação IBOVESPA     | 0,76       | 0,75       | 0,76       | 0,72       | 0,93   | -      | -      |

#### 4.4 Carteiras com rebalanceamento trimestral

A Tabela 4 apresenta os resultados das carteiras com rebalanceamento trimestral. Em termos de retorno, todas as carteiras apresentam resultados inferiores se comparados as que permaneceram durante todo o período com a posição inicial (sem rebalanceamento – Tabela 2), o que levanta a questão da necessidade de entender qual o melhor momento para rebalancear a carteira, ou seja, definir um critério para o momento mais adequado de revisão dos pesos. Ainda assim, a carteira  $CVM_{GA}$  apresenta um retorno cumulativo em média superior às demais carteiras, em termos de sua evolução temporal, conforme apresentado na Figura 3.



**Figura 2.** Retorno cumulativo das carteiras com rebalanceamento anual ao longo do período de janeiro de 2013 a dezembro de 2019.

Quando observamos o risco das carteiras otimizadas trimestralmente, de acordo com os resultados da Tabela 4, notamos que a carteira CVM otimizada por algoritmos genéticos ( $CVM_{GA}$ ) apresenta uma volatilidade anualizada de 11,76%, sendo quase 25% menor do que a média da volatilidade das demais carteiras, e 90% menor que a volatilidade do índice de ações IBOVESPA. A carteira otimizada por algoritmo genético também apresentou a menor perda máxima, de 20,64%, enquanto que as carteiras CVM otimizada por gradiente ( $CVM_{GR}$ ) e as carteiras que maximizam a razão de Sharpe otimizadas por gradiente e por AGs ( $MSR_{GR}$  e  $MSR_{GA}$ ) tiveram uma perda máxima observada respectivamente de 34,15%, 32,09% e 43,36%.

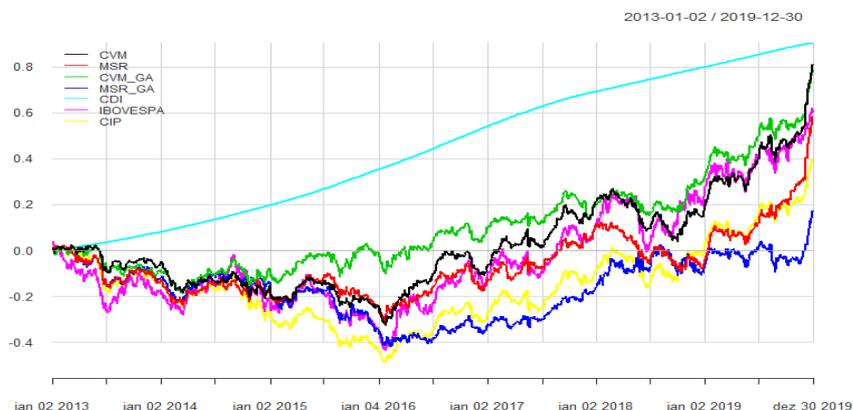
**Tabela 4 - Métricas de avaliação de risco e retorno das carteiras com rebalanceamento trimestral.**

|                         | $CVM_{GR}$ | $MSR_{GR}$ | $CVM_{GA}$ | $MSR_{GA}$ | CIP    | IBOV   | CDI    |
|-------------------------|------------|------------|------------|------------|--------|--------|--------|
| Retorno Anualizado      | 8,99%      | 6,90%      | 8,69%      | 2,27%      | 4,99%  | 7,07%  | 9,82%  |
| Retorno Cumulativo      | 80,59%     | 58,10%     | 77,23%     | 16,69%     | 39,67% | 59,82% | 90,27% |
| Volatilidade Anualizada | 12,39%     | 14,47%     | 11,76%     | 17,01%     | 16,88% | 22,35% | 0,18%  |
| Perda Máxima            | 34,15%     | 32,09%     | 20,64%     | 43,36%     | 50,00% | 45,32% | -      |
| Índice de Sharpe        | -0,06      | -0,18      | -0,09      | -0,40      | -0,26  | -0,11  | -      |
| CAPM Alfa               | 0,00       | 0,00       | 0,00       | 0,00       | 0,00   | -      | -      |
| CAPM Beta               | 0,42       | 0,48       | 0,39       | 0,52       | 0,70   | -      | -      |
| Índice de Modigliani    | 0,08       | 0,05       | 0,08       | 0,00       | 0,03   | -      | -      |
| Correlação IBOVESPA     | 0,76       | 0,74       | 0,74       | 0,68       | 0,93   | -      | -      |

#### 4.5 Carteiras com rebalanceamento mensal

Conforme a Tabela 5, o desempenho das carteiras rebalanceadas mensalmente estão em linha com os resultados anteriores. As carteiras de variância mínima mais uma vez apresentam o melhor retorno anualizado, sendo os valores das carteiras otimizadas por gradiente e algoritmos genéticos ( $CVM_{GR}$  e  $CVM_{GA}$ ) de, respectivamente, 9,54% e 8,04% contra 7,21% da carteira que maximiza a razão de Sharpe otimizada por gradiente ( $MSR_{GR}$ ) e de 7,37% da otimizada por AGs ( $MSR_{GA}$ ). Ainda em termos de retornos, ambas as carteiras otimizadas ( $CVM$  e  $MSR$ ) superaram a carteira ingênua CIP e o IBOVESPA, mas não a taxa livre de risco que, para o período, teve um retorno anualizado de 9,82%. Em termos de risco, se destaca a MSR otimizada por métodos de gradiente ( $MSR_{GR}$ ) que teve uma volatilidade anualizada 13,3% maior do que a média apresentada pelas demais carteiras, mas mesmo assim menor do que os *benchmarks* CIP e IBOVESPA. Todas as carteiras superaram o desempenho da carteira

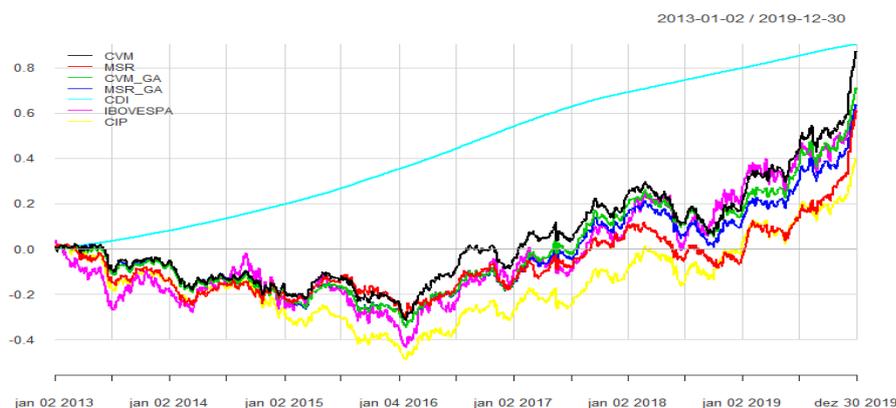
igualmente ponderada e do IBOVESPA, considerando risco, retorno e índice de Sharpe. Na Figura 5 observa-se que o desempenho da carteira que maximiza a razão de Sharpe, quando otimizada por AGs, apresenta, de forma geral, um retorno cumulativo superior às demais carteiras.



**Figura 3.** Retorno cumulativo das carteiras com rebalanceamento trimestral ao longo do período de janeiro de 2013 a dezembro de 2019.

**Tabela 5 - Métricas de avaliação de risco e retorno das carteiras com rebalanceamento mensal.**

|                         | CVM <sub>GR</sub> | MSR <sub>GR</sub> | CVM <sub>GA</sub> | MSR <sub>GA</sub> | CIP    | IBOV   | CDI    |
|-------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------|--------|--------|
| Retorno Anualizado      | 9,54%             | 7,21%             | 8,04%             | 7,37%             | 4,99%  | 7,07%  | 9,82%  |
| Retorno Cumulativo      | 86,87%            | 61,26%            | 70,07%            | 62,92%            | 39,67% | 59,82% | 90,27% |
| Volatilidade Anualizada | 12,38%            | 14,41%            | 12,21%            | 11,86%            | 16,88% | 22,35% | 0,18%  |
| Perda Máxima            | 33,26%            | 32,03%            | 35,79%            | 36,04%            | 50,00% | 45,32% | -      |
| Índice de Sharpe        | -0,02             | -0,17             | -0,13             | -0,19             | -0,26  | -0,11  | -      |
| CAPM Alfa               | 0,00              | 0,00              | 0,00              | 0,00              | 0,00   | -      | -      |
| CAPM Beta               | 0,41              | 0,47              | 0,39              | 0,38              | 0,70   | -      | -      |
| Índice de Modigliani    | 0,09              | 0,06              | 0,07              | 0,05              | 0,03   | -      | -      |
| Correlação IBOVESPA     | 0,75              | 0,74              | 0,72              | 0,71              | 0,93   | -      | -      |



**Figura 4.** Retorno cumulativo das carteiras com rebalanceamento mensal ao longo do período de janeiro de 2013 a dezembro de 2019.

#### 4.6 Discussões gerais

Os resultados analisados indicam a superioridade das carteiras de variância mínima para todas as frequências de rebalanceamento consideradas. A CVM foi superior as carteiras MSR e ao índice IBOVESPA levando em consideração os indicadores de desempenho, retorno cumulativo, volatilidade anualizada e índice de Modigliani. Esse resultado, está em linha com o de outros trabalhos, como o de Rubesam e Beltrame (2013), que também constataram que a CVM apresenta um resultado superior aos índices de mercado e a MSR. O desempenho inferior da carteira que maximiza a razão de Sharpe pode ser explicado pelo erro de estimação dos retornos esperados.

As carteiras otimizadas por algoritmos genéticos tiveram, no geral, um desempenho superior quando comparadas às suas contrapartes otimizadas por métodos de gradiente. Usando o índice de Modigliani como parâmetro de avaliação conjunta de risco e retorno, apenas nas carteiras com rebalanceamento trimestral, as carteiras otimizadas com AGs foram inferiores as otimizadas pelo método tradicional. O desempenho ruim, nesse caso, pode ser explicado pela ausência da necessidade de revisitação dos pesos das carteiras, requerendo um critério racional para o rebalanceamento.

O rebalanceamento é um fator importante, com impactos observados nos indicadores de desempenho e no custo da carteira, que não foi considerado nesse trabalho. Quanto maior a frequência de rebalanceamento, maiores são os custos de transação. Nessa pesquisa, determinamos a frequência de maneira exógena, sem considerar a necessidade ou não do rebalanceamento. Pesquisas como a de Demos et al. (2015), que propõem monitorar os dados, definindo estatísticas para efetuar ou não o rebalanceamento da carteira, são alternativas para o para melhorar o desempenho das carteiras otimizadas de forma tradicional e otimizadas por algoritmos genéticos.

Em resumo, os resultados empíricos apontaram que os algoritmos genéticos são uma alternativa potencial para a otimização de uma carteira de ações no mercado brasileiro e, independente da estratégia considerada, se de variância mínima ou que maximiza a razão de Sharpe, pode gerar ganhos significativos para o investidor. Os AGs se mostraram mais eficazes que os métodos de gradiente pois estão menos sujeitos a obtenção de máximos e mínimos locais, gerando assim melhores soluções. Assim, investidores podem se valer de estratégias simples como a de mínima variância e, ainda, obter melhor resultados quando os pesos são determinados por AGs.

#### 5. Conclusão

O objetivo deste trabalho foi avaliar o uso de algoritmos genéticos para a otimização de carteiras de variância mínima no mercado de ações brasileiro. Essas carteiras foram comparadas com carteiras otimizadas por métodos tradicionais baseados em gradiente e de acordo com *benchmarks*, como o IBOVESPA, CDI, carteiras que maximizam a razão de Sharpe e igualmente ponderadas. Foram considerados as ações mais líquidas negociadas na B3 entre janeiro de 2010 e dezembro de 2019. Os resultados indicaram que as carteiras de mínima variância otimizadas por AGs podem, em termos de risco e retorno, superar o método tradicional de otimização baseado em gradiente, gerando assim retornos financeiros maiores para os investidores. A carteira de variância mínima sem rebalanceamento obtida por AGs apresentaram um desempenho superior às demais carteiras com a mesma frequência de rebalanceamento e *benchmarks* considerando todos os parâmetros de desempenho estudados. No entanto, quando consideramos frequências maiores de rebalanceamento, há uma notável perda da performance das carteiras. Há espaço então, para novas pesquisas que apliquem o AGs para otimização de carteiras no Brasil considerando frequências de rebalanceamento a partir do

monitoramento dos dados com base, por exemplo, em medidas mais robustas de cálculo da matriz de covariâncias.

## Notas

1. Fonte: [http://www.b3.com.br/pt\\_br/market-data-e-indices/servicos-de-dados/market-data/consultas/mercado-a-vista/historico-pessoas-fisicas/](http://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/servicos-de-dados/market-data/consultas/mercado-a-vista/historico-pessoas-fisicas/). Acesso em: 6 de junho de 2020.

## Referências Bibliográficas

- ALMONACID, Gustavo A.; SANTOVITO, Rogério F. Aplicabilidade da Teoria de Markowitz para investimentos em ativos do Real Estate: estudo de caso de uma carteira mista. Monografia (MBA), Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010. 76 f.
- CALDEIRA, João F.; MOURA, Guilherme V.; SANTOS, André A. P. Seleção de carteiras utilizando o modelo Fama-French-Carhart. **Revista Brasileira de Economia**, v. 67, n. 1, p. 45-65, 2013.
- CARRILLO, O. J. B. Algoritmo híbrido para avaliação da integridade estrutural: uma abordagem heurística. Tese (Doutorado), Universidade Federal de São Carlos, Brasil, 2007. 152 f.
- CARTACHO, Marcelo S.; SOUZA, Antônio A. A Utilização de um Modelo Composto por Algoritmos Genéticos e Redes Neurais no Processo de Seleção de Carteiras. **In.:** Encontro Nacional dos Programas de Pós-Graduação em Administração (EnAnpad), Salvador, 2002.
- CHANG, Tun-Jen; YANG, Sang-Chin; CHANG, Kuang-Jung. Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm. **Expert Systems with Applications**, v. 36, n. 7, p. 10529-10537, 2009.
- CHEN, Jiah-Shing; HOU, Jia-Li; Wu, Shih-Min; CHANG-CHIEN, Ya-Wen. Constructing investment strategy portfolios by combination genetic algorithms. **Expert Systems with Applications**, v. 36, n. 2, p. 3824-3828, 2009.
- CHEN, Wei. Artificial bee colony algorithm for constrained possibilistic portfolio optimization problem. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 429, p. 125-139, 2015.
- CHIAN, Swee C.; TAN, Kay C.; MAMUM, Abdullah Al. Evolutionary multi-objective portfolio optimization in practical context. **International Journal of Automation and Computing**, v. 5, p. 67-80, 2008.
- COSTA, Leticia F. C.; CORTES, Omar A. C.; COSTA, João P. A. Uma nova meta-heurística adaptativa baseada em vetor de avaliações para otimização de portfólios de investimentos. **Inteligência Artificial**, v. 22, n. 64, p. 85-101, 2019.
- DANTAS, David H. C. **Mercados de créditos e de capitais**. Senac: São Paulo, 2020.
- DEMOS, Guilherme L.; PIRES, Thomas H. S.; MOURA, Guilherme V. Rebalanceamento Endógeno para Portfólios de Variância Mínima. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 13, n. 4, p. 544-570, 2015.
- DEMIGUEL, Victor; NOGALES, Francisco J. Portfolio selection with robust estimation. **Operations Research**, v. 57, n. 3, p. 560-577, 2009.
- DIAS, Carlos H. Um novo algoritmo genético para a otimização de carteiras de investimento com restrições de cardinalidade. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2008. 110 f.
- FRANÇA, Fabrício O. Algoritmos bio-inspirados aplicados a otimização dinâmica. Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, 2005, 120 f.

- FRANKLIN JR, Sergio L.; DUARTE, Thiago B.; NEVES, César R.; MELO, Eduardo F. L. A estrutura a termo de taxas de juros no Brasil: modelos, estimação e testes. **Economia Aplicada**, v. 16, n. 2, p. 255-290, 2012.
- FU, Tak-Chung; CHUNG, Chi-Pang; CHUNG, Fu-Lai. Adopting genetic algorithms for technical analysis and portfolio management. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 66, n. 10, p. 1743-1757, 2013.
- GOLDBERG, David E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning**, Addison-Wesley: US, 1989.
- HOLLAND, J. H. **Adaptation in natural and artificial systems**. The University of Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1975.
- IGARASHI, Wagner; MARTIOLI, Lucas F.; IGARASHI, Deisy C. C. Econometria e inteligência artificial: criação de portfólio de ações rentáveis. **Brazilian Journal of Development**, v. 5, n. 6, p. 4356-4371, 2019.
- JÚDICE, Joaquim J.; RIBEIRO, Celma O.; SANTOS, Jorge P. J. Análise comparativa dos modelos de seleção de carteiras de ações de Markowitz e Konno. **Investigação Operacional**, v. 23, n. 2, p. 211-224, 2003.
- LIN, Chang-Chun; LIU, Yi-Ting. Genetic algorithms for portfolio selection problems with minimum transaction lots. **European Journal of Operational Research**, v. 185, n. 1, p. 393-404, 2008.
- LYRIO, Maurício V. L.; PRATES, Wlaldemir; LIMA, Marcus V. A.; LUNKES, Rogério J. Análise da implementação de uma estratégia de investimento em ações baseada em um instrumento de apoio à decisão. **Contaduría y Administración**, v. 60, n. 1, p. 113-143, 2015.
- MARKOWITZ, H. Portfolio selection. **Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.
- MARQUES, Felipe T. Otimização de carteiras com lotes de compra e custos de transação, uma abordagem por algoritmos genéticos. Tese (Doutorado), Universidade de São Paulo, 2007.
- QUINZANI, Cecilia M. Otimização multiobjetivo de portfólios utilizando algoritmos evolutivos. Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, 2010. 43 f.
- RUBESAM, Alexandre; BELTRAME, André L. Carteiras de variância mínima no Brasil. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 11, n. 1, p. 81-118, 2013.
- SANTOS, André A. P.; TESSARI, Cristina. Técnicas quantitativas de otimização de carteiras aplicadas ao mercado de ações brasileiro. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 10, n. 3, p. 369-393, 2012.
- SERAPIÃO, Adriane B. S. Fundamentos de otimização por inteligência de enxames: uma visão geral. **SBA: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica**, v. 20, n. 3, p. 271-304, 2009.
- SILVA, Yuri L. T. V.; HERTHEL, Ana B.; SUBRAMANIAN, Anand. A multi-objective evolutionary algorithm for a class of mean-variance portfolio selection problems. **Expert Systems with Applications**, v. 133, p. 225-241, 2019.
- SUKSONGHONG, Karoon; BOONLONG, Kittipong; GOH, Kim-Leng. Multi-objective genetic algorithms for solving portfolio optimization problems in the electricity market. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 58, p. 150-159, 2014.
- ZANINI, Francisco A. M.; FIGUEIREDO, Antonio C. As teorias de carteira de Markowitz e de Sharpe: uma aplicação no mercado brasileiro de ações entre julho/95 e junho/2000. **Revista de Administração Mackenzie**, v. 6, n. 2, p. 37-64, 2005.